

Correction Devoir maison n°9 Bis

Exercice 1 (Exercice 19 FExo 14)Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

1. Pour tout
- $x \in \mathbb{R}$
- ,
- $e^x + 1 \neq 0$
- donc

$$D_f = \mathbb{R}.$$

2. La fonction
- $x \rightarrow e^x + 1$
- est de classe
- \mathcal{C}^1
- et ne s'annule pas sur
- \mathbb{R}
- .
-
- La fonction
- $x \rightarrow e^x - 1$
- est de classe
- \mathcal{C}^1
- sur
- \mathbb{R}
- .

Donc la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} en tant que quotient de fonction dérivable.

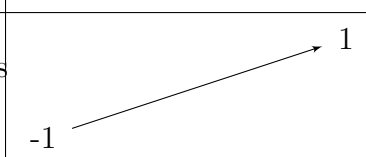
$$\text{Pour tout } x \text{ réel, } f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

3. On a

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

En utilisant cette forme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Enfin, la fonction $f'(x)$ est strictement positive donc la fonction f est strictement croissante. On trace les variations de la fonction f .

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	-1	1



4. La fonction
- f'
- est dérivable sur
- \mathbb{R}
- en tant que quotient de fonction dérivable. On calcule alors pour tout
- $x \in \mathbb{R}$
- ,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2e^x(e^x + 1)^2 - 2e^x \times 2e^x(e^x + 1)}{(e^x + 1)^4} \\ &= \frac{2e^x(e^{2x} + 2e^x + 1) - 4e^{2x}(e^x + 1)}{(e^x + 1)^4} \\ &= \frac{2e^{3x} + 4e^{2x} + 2e^x - 4e^{3x} - 4e^{2x}}{(e^x + 1)^4} \\ &= \frac{-2e^{3x} + 2e^x}{(e^x + 1)^4} \\ &= \frac{-2e^x(e^{2x} - 1)}{(e^x + 1)^4} \end{aligned}$$

Le signe de f'' est donnée par l'expression $e^{2x} - 1$. Or

$$e^{2x} - 1 > 0 \iff e^{2x} > 1 \iff 2x > 0 \iff x > 0$$

La dérivée seconde de f est donc positive sur $] -\infty; 0[$ et négative sur $]0; +\infty[$. La dérivée de la fonction f change donc de sens de variation au point $x = 0$.

Le point $x = 0$ est un point d'inflexion de f .

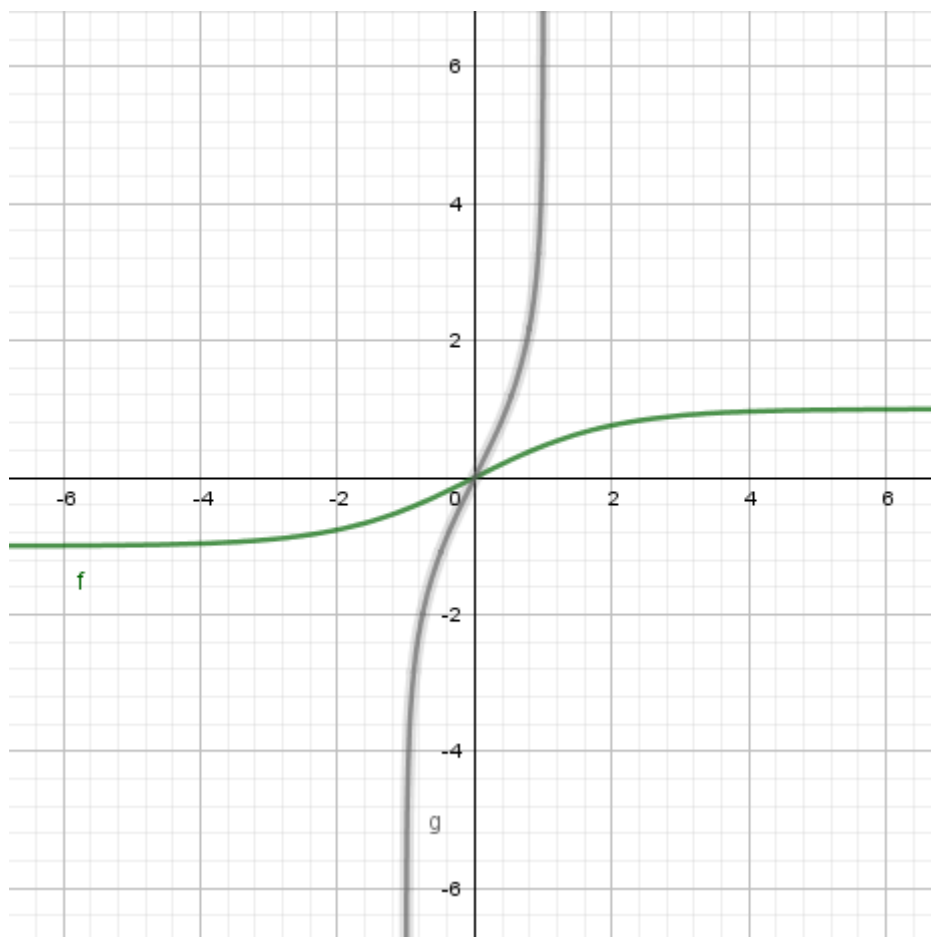
5. L'équation de la tangente à f en 0 est donnée par la formule :

$$y = f(0) + x f'(0)$$

c'est à dire

$$y = \frac{1}{2}x$$

6. Le graphique est le suivant



Exercice 2 (Exercice 23 FExo 14)

On souhaite déterminer le nombre de solutions de $(E) : x^3 - 3x + 1 = 0$ ainsi que la valeur approchée d'une des racines.

1. On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \rightarrow x^3 - 3x + 1$. Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} (c'est un polynôme) et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

On trace son tableau de variation

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗ 3		↘ -1		↗ $+\infty$	

On a alors :

- La fonction f est continue sur $] - \infty; -1[$.
- La fonction f est strictement croissante sur $] - \infty; -1[$.
- $f(] - \infty; -1[) =] - \infty; 3[$ et $0 \in] - \infty; 3[$.

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel $\alpha < -1$ tel que $f(\alpha) = 0$.

De la même façon,

- La fonction f est continue sur $] - 1; 1[$.
- La fonction f est strictement décroissante sur $] - 1; 1[$.
- $f(] - 1; 1[) =] - 1; 3[$ et $0 \in] - 1; 3[$.

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel $-1 < \beta < 1$ tel que $f(\beta) = 0$.

- La fonction f est continue sur $]1; +\infty[$.
- La fonction f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.
- $f(]1; +\infty[) =] - 1; +\infty[$ et $0 \in] - 1; +\infty[$.

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel $1 < \gamma$ tel que $f(\gamma) = 0$.

Ainsi, l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet 3 solutions α, β, γ vérifiant $\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$.

2. On veut obtenir une approximation de β . On introduit $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$ et la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$.

- (a) On a $f(0) = 1$ et $f(1/2) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{8}$. Ainsi, d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires,

$$\beta \in [0, 1/2].$$
 Enfin,

$$g(x) = x \iff x^3 + 1 = 3x \iff f(x) = 0$$

- (b) La fonction g est dérivable sur $[0, 1/2]$ et

$$\forall x \in [0, 1/2], \quad g'(x) = x^2 \geq 0$$

La fonction g est croissante et $g(0) = \frac{1}{3}$ et $g(1/2) = \frac{3}{8}$ donc $g([0, 1/2]) = [1/3, 3/8] \subset [0, 1/2]$.

L'ensemble $[0, 1/2]$ est stable par g .

De plus $\forall x \in [0, 1/2], x^2 \in [0, 1/4]$, et donc

$$\forall x \in [0, 1/2], \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{4}.$$

(c) On montre les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{u_n \in [0, 1/2]\}$.

— **Initialisation** : $u_0 = 0$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc $u_n \in [0, 1/2]$ et

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [0, 1/2]$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1/2]$.

(d) On sait que

— La fonction f est dérivable sur $[0, 1/2]$

— Pour tout $x \in [0, 1/2]$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1/2]$ et $\beta \in [0, 1/2]$.

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|}$$

On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \left\{ |u_n - \beta| \leq \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} \right\}$.

— **Initialisation** : $u_0 = 0$, $\beta \in [0, 1/2]$ donc $|u_0 - \beta| \leq \frac{1}{2}$ et la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \beta| &\leq \frac{1}{4}|u_n - \beta| \\ &\leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{1}{4^{n+1}} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \beta| \leq \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}$.

(e) On résout l'équation

$$\begin{aligned} \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2} &\leq 10^{-9} \\ \iff \frac{1}{4^n} &\leq 2 \times 10^{-9} \\ \iff 4^n &\geq \frac{10^9}{2} \\ \iff n \ln(4) &\geq \ln\left(\frac{10^9}{2}\right) \\ \iff n &\geq \frac{\ln\left(\frac{10^9}{2}\right)}{\ln(4)} \end{aligned}$$

On a la relation $|u_n - \beta| \leq 10^{-9}$ pour

$$n = E \left(\frac{\ln \left(\frac{10^9}{2} \right)}{\ln(4)} \right) + 1$$

où E représente la fonction partie entière.

(f) Programme Scilab :

```
function y = g(x)
    y = (x^3 + 1)/3
endfunction
```

```
n = floor(log(2 * 10^(-9)) / (-log(4))) + 1
u = 0
for k=1:n
    u = g(u)
end
```

```
disp('La solution obtenue par la méthode de l''exercice est x = ' + string(u)
+ '. On a obtenue cette solution pour n = ' + string(n) + '.')
```

Exercice 3

Terrassé par la perte de son fidèle ami Osorno emporté par la déesse Mapuche, et chassé du Villarica par les flammes noires de sa récente éruption, notre jeune condor Puyehue décida de réaliser un voyage initiatique à travers les Andes. Celui-ci l'amena à rencontrer une jeune condor nommée Chiloé. Et aujourd'hui il songe à sa descendance. Il faut savoir que le condor se reproduit de la manière suivante, il a 2 descendants avec probabilité $p \in]0, 1[$, et 0 descendant avec probabilité $1 - p$. On note X_n le nombre de descendants de Puyehue à la $n - ieme$ génération. On s'intéresse à $P(X_n = 0)$, c'est à dire à la probabilité que la lignée de Puyehue soit éteinte à la $n - ieme$ génération.

1. Soit $f(x) = px^2 + 1 - p$ une fonction définie sur $[0, 1]$ et soit $(u_n)_n$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

(a) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2px$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et décroissante sur $] - \infty, 0[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	$1 - p$	$+\infty$

(b) On montre les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{u_n \in [0, 1]\}$.

— **Initialisation** : $u_0 = 0$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc $u_n \in [0, 1/2]$ et

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [1 - p, 1] \subset [0, 1]$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

(c) On montre les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{u_{n+1} \geq u_n\}$.

— **Initialisation :** $u_0 = 0$ et $u_1 = 1 - p > 0$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

— **Hérédité :** On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc, comme la fonction f est croissante sur $[0, 1]$ et que $u_n \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} \geq u_n &\implies f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \\ &\implies u_{n+2} \geq u_{n+1} \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion :** La suite (u_n) est croissante.

(d) La suite est croissante majorée, d'après le théorème de convergence monotone,

elle est convergente.

On note ℓ sa limite.

(e) On suppose que $p \leq 1/2$, on résout alors

$$\begin{aligned} \ell = f(\ell) &\iff \ell = p\ell^2 + 1 - p \\ &\iff p\ell^2 - \ell + 1 - p \end{aligned}$$

On calcule le discriminant d'une telle équation :

$$\Delta = 1 - 4p(1 - p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p - 1)^2$$

Or remarquons que $|2p - 1| = 1 - 2p$ car $p \leq 1/2$. Les solutions sont donc

$$x_1 = \frac{1 - (1 - 2p)}{2p} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + (1 - 2p)}{2p} = \frac{1 - p}{p}$$

Or $1 - p \geq \frac{1}{2}$ et donc $\frac{1 - p}{p} \geq 1$. Comme $u_n \leq 1$, on a nécessairement que

la suite (u_n) converge vers 1.

(f) On suppose désormais que $p > 1/2$. Dans ce cas, $\frac{1 - p}{p} \leq 1$ On montre par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \{u_n \in [0, (1 - p)/p]\}$.

— **Initialisation :** $u_0 = 0$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

— **Hérédité :** On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq \frac{1 - p}{p} &\implies f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1 - p}{p}\right) \\ &\implies 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1 - p}{p} \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \frac{1-p}{p}\right]}$.

Les solutions de $\ell = f(\ell)$ ont été calculés précédemment. La suite étant inférieure à $\frac{1-p}{p}$

$$\boxed{\text{on a } \ell = \frac{1-p}{p}}$$

2. (a) On remarque que $X_0 = 1$. On a $X_1(\Omega) = \{0, 2\}$ avec les probabilités :

$$\boxed{P(X_1 = 0) = 1 - p, \quad P(X_1 = 2) = p}$$

On détermine maintenant la loi de X_2 . A la première génération, Puyehne peut avoir 0 ou 2 descendants. Ces descendants peuvent avoir à leur tour 0 ou 2 descendants. Il y aura donc 0, 2 ou 4 condor à la deuxième génération :

$$X_2(\Omega) = \{0, 2, 4\}.$$

L'évènement $X_2 = 0$ se réalise si Puyehne n'a eu aucun descendants ou si les deux descendants de Puyehne n'ont eu à leur tour aucun descendants. C'est à dire

$$(X_2 = 0) = (X_1 = 0) \cup (X_1 = 2 \cap X_2 = 0)$$

Or $P_{X_1=2}(X_2 = 0) = (1 - p)^2$. Donc

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 0) + P(X_1 = 2) \times P_{X_1=2}(X_2 = 0) \\ &= 1 - p + p(1 - p)^2 \\ &= \boxed{(1 - p)(1 + p - p^2)} \end{aligned}$$

L'évènement $X_2 = 2$ se réalise si Puyehne a eu deux descendants et si un des descendant à eu 2 descendants et l'autre 0. Ainsi

$$\begin{aligned} P(X_2 = 2) &= P(X_1 = 2) \times P_{X_1=2}(X_2 = 2) \\ &= p \times 2p(1 - p) \\ &= \boxed{2p^2(1 - p)} \end{aligned}$$

🌀 **Remarque :** Ne pas oublier de multiplier par 2 pour prendre en compte le fait que ça peut être l'un ou l'autre des descendants qui enfante.

Enfin l'évènement $X_2 = 4$ est plus simple à calculer. Il ne se réalise que si Puyehne a eu deux descendants et si chaque descendants a encore deux descendants.

$$\boxed{P(X_2 = 4) = p^3}$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) + P(X_2 = 2) + P(X_2 = 4) &= (1 - p)(1 + p - p^2) + 2p^2(1 - p) + p^3 \\ &= 1 + p - p^2 - p - p^2 + p^3 + 2p^2 - 2p^3 + p^3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Déterminer la loi de X_1 et X_2 .

(b) $X_1(\Omega) = \{0, 2\}$ donc

$(X_1 = 0, X_1 = 2)$ est un système complet d'événements.

(c) En sachant que Puyehne a eu deux descendants, sa lignée s'éteindra à la $n + 1$ -ième génération si et seulement si la lignée de ses deux descendants sont éteintes à la n -ième génération. Ainsi

$$P_{X_1=2}(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0)^2.$$

(d) On a évidemment $P_{X_1=0}(X_{n+1} = 0) = 1$ (si la lignée s'éteint à la première descendance, elle est éteinte à la n -ième). D'après la formule des probabilités totales appliquées à $(X_1 = 0, X_1 = 2)$, on a

$$P(X_{n+1} = 0) = P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_{n+1} = 0) + P(X_1 = 2)P_{X_1=2}(X_{n+1} = 0)$$

$$\boxed{= 1 - p + pP(X_n = 0)^2}$$

(e) On pose $u_n = P(X_n = 0)$. On remarque que $u_0 = P(X_0 = 0) = 0$ (car X_0 est une loi certaine valant 1) et que

$$u_{n+1} = 1 - p + pu_n^2 = f(u_n)$$

On retrouve alors la suite étudiée à la première partie. Il y a alors 2 cas

— Cas ou $p \leq \frac{1}{2}$. Dans ce cas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0) = 1$$

Si la capacité du Condor à se reproduire est inférieur à $1/2$, alors sa lignée s'éteindra presque sûrement (et il est probable que le Condor serait un animal en voie d'extinction).

— Cas ou $p > \frac{1}{2}$. Dans ce cas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0) = \frac{1-p}{p}$$

La probabilité que la lignée du Condor s'éteigne est $\frac{1-p}{p}$.

Exercice 4

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 , disposés en pentagone et reliés par des routes, comme illustre le schéma ci-contre. Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2 . Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes :

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

A. Modélisation du problème

Pour tout entier naturel n , on définit les trois événements A_n, B_n, C_n :

- A_n : « les deux personnes sont sur le même site après le n -ième déplacement »
- B_n : « les deux personnes sont sur des sites adjacents après le n -ième déplacement »
- C_n : « les deux personnes sont à deux routes de distance après le n -ième déplacement »

On note a_n, b_n, c_n les probabilités des événements A_n, B_n, C_n .

1. La distance maximale entre deux sites est de deux routes ;
Donc A_n, B_n, C_n sont les seuls possibles.
Comme ils sont de plus incompatibles,
Conclusion : ils forment un système complet d'événements.
2. A l'instant 0, ils sont à une route de distance donc
Conclusion : $a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0$
3. (a) Si les deux sont à deux routes de distance, ils se retrouvent sur le même site à condition qu'ils se dirigent tous deux dans la direction qui les rapproche.
Chacun le fait avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ donc *Conclusion* : $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$.
- (b) S'ils sont tous les deux sur le même site, ils ne bougent plus, donc ils restent ensemble.
Conclusion : $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$
- (c) Pour cette même raison : $P_{A_n}(B_{n+1}) = 0 : P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$
 $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0$ (quand ils sont à une route de distance, car ils se croisent ou ils s'éloignent)
 $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{3}{4}$ (ils se déplacent tous deux dans le même sens ; horaire avec une probabilité $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ou antihoraire, ou ils se croisent)
 $P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4}$ (ils se fuient)
 $P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$ (dans le sens opposé qui les réunit)
 $P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$ (dans le sens opposé qui les rapproche)
 $P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2}$ (ils se déplacent tous deux dans le même sens)
4. (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements donc
 $P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n)$
 Donc $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}c_n$ et de même

$$\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N} : \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}$$

N.B. Vérifier la cohérence ! On doit avoir $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = 1$

5. (a) On a alors

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} \\ &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \right) \\ &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}c_n \end{aligned}$$

et comme $b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ on a $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$ et donc

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}(4b_{n+1} - 3b_n) \\ &= \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n \end{aligned}$$

(b) La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique est $r^2 - \frac{5}{4}r + \frac{5}{16} = 0$ de discriminant $\Delta = \frac{25}{16} - \frac{20}{16} = \frac{5}{16}$ et donc de racines $\alpha = \frac{\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \frac{5 + \sqrt{5}}{8}$

Donc pour tout entier n : $b_n = A\alpha^n + B\beta^n$ avec A et B solutions de

$$\begin{cases} b_0 = 1 = A + B \\ b_1 = \frac{3}{4} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}A + \frac{5 + \sqrt{5}}{8}B \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} B = 1 - A \\ -\frac{2\sqrt{5}}{8}A = \frac{3}{4} - \frac{5 + \sqrt{5}}{8} = \frac{1 - \sqrt{5}}{8} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} B = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \\ A = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{b_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{8}\right)^n + \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{8}\right)^n = \frac{4}{5} (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})}$$

(c) Et comme $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$ on a alors :

$$\begin{aligned} c_n &= 4\frac{4}{5} (\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}) - 3\frac{4}{5} (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \\ &= \frac{4}{5} ((4\alpha - 3)\alpha \cdot \alpha^n + (4\beta - 3)\beta \cdot \beta^{n+1}) \end{aligned}$$

avec .

$$\begin{aligned} (4\alpha - 3)\alpha &= \left(4\frac{5 - \sqrt{5}}{8} - 3\right) \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \\ &= -\frac{1}{4}\sqrt{5} \\ (4\beta - 3)\beta &= \left(4\frac{5 + \sqrt{5}}{8} - 3\right) \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{c_n = \frac{\sqrt{5}}{5} (\beta^n - \alpha^n)}$$

6.

(a) Comme (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, $a_n + b_n + c_n = 1$ et

$$\begin{aligned} a_n &= 1 - b_n - c_n \\ &= 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} (\beta^n - \alpha^n) - \frac{4}{5} (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \\ &= 1 - \alpha^n \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{4}{5}\alpha\right) - \beta^n \left(\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{4}{5}\beta\right) \\ &= 1 - \alpha^n \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{5 - \sqrt{5}}{10}\right) - \beta^n \left(\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{5 + \sqrt{5}}{10}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{a_n = 1 - \alpha^n \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} - \beta^n \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}}$$

(b) Et comme $|\alpha| < 1$ et $|\beta| < 1$ (car $2 < \sqrt{5} < 3$) alors $\alpha^n \rightarrow 0$ et $\beta^n \rightarrow 0$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1}$$

(c) D'après la question précédente, la probabilité que deux personnes se retrouvent tend vers 1. Donc la probabilité que deux personnes ne se retrouvent jamais est nulle. Pourtant, cet événement n'est pas impossible ! Comment cela se fait-il ? Réponse dans quelques semaines.

$$\text{Conclusion : } \boxed{\text{Les deux personnes se retrouveront presque sûrement.}}$$